CLASA A IV-A
Problema 1

1. Alegeţi şi puneţi semnele potrivite (**+** ; **-** ; **x** ; **:**) şi paranteze (acolo unde e cazul) pentru a obţine rezultatele indicate:

   (OBS. : Nu trebuie folosite obligatoriu toate semnele !)

3 3 3 3	= 1
3 3 3 3	= 3
3 3 3 3	= 5
3 3 3 3	= 10
3 3 3 3	= 15
3 3 3 3	= 27
3 3 3 3	= 36

Prof. Ştefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

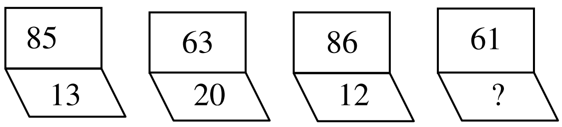
<u>Barem:</u>

3 : 3 +3 -3 = 1 ……………………………………………1p
(3+3+3) : 3 = 3 ……………………………………… 1p
3 + 3 – 3 : 3= 5 ……………………………………………1p
$3\cdot 3+3:3=10$ ……………………………………………1p
$(3+3)\cdot 3-3=15$ ……………………………………………1p
$(3+3+3)\cdot 3=27$ ……………………………………………1p
$(3\cdot 3+3)\cdot 3=36$ ……………………………………………1p

Orice alta rezolvare corecta se puncteaza corespunzator.

Clasa a IV-a
Problema 2

2. a) Indicaţi numărul $\overline{MATE}$**,** ştiind că este cel mai mic număr natural de patru cifre distincte**.**
   b) Determinaţi numărul $\overline{ISTEŢ}$**,** ştiind că este cel mai mare număr natural format din cinci cifre distincte, cu condiţia să nu fie mai mare decât 77777.
   c) Pe fiecare dintre cele 4 cărţi, numărul de jos este într-o relaţie ascunsă cu numărul de sus. Care este al doilea număr de pe a patra carte?

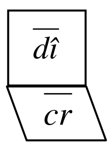


Justificaţi!

Prof. Ştefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

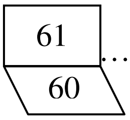
Barem

a) $\overline{MATE}$ = 1023 …………………………………………..2p
b) $\overline{ISTEŢ}$ = 76985 …………………………………………..2p



c) Pentru primele 3 cărţi, observăm următoarea corespondenţă:

evident $d = î \cdot c + r$ ……………………………………………..2p

deci 

………………………………………………..1p

Clasa a IV-a
Problema 3

3. În pătratul de mai jos *a* = 2, *d* = 9, şi *e* = 6.

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

$\longrightarrow$

2		*c*
9	6	

a) Ştiind că *abc=def=ghi=adg=beh=cfi=aei=ceg* $\neq$ *0* , aflaţi c.
b) Dacă ştim şi că *dg* + *ai* = 144, deteminaţi şi celelalte numere care lipsesc.

Prof. Ştefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

Barem:

a) $2 \cdot 9 \cdot g = g \cdot 6 \cdot c \Rightarrow c = 3$ …………………………1p
b) $9g + 2i = 144$
$2 \cdot 9 \cdot g = 2 \cdot 6 \cdot i \Rightarrow 3g = 2i$ ………………………..1p
$12g = 144 \Rightarrow g = 12$ ………………………………1p
i = 18 ………………………………………………1p
h = 1………………………………………………..1p
f = 4 ………………………………………………..1p
b = 36………………………………………………1p

Clasa a IV-a
Problema 4

4. Avem trei vase cu apă. Jumătate din apa aflată în primul vas o distribuim în mod egal în celelalte două vase. Apoi, jumătate din apa ce se află acum în al doilea vas o vărsăm, în mod egal, în primul şi respectiv al treilea vas. În sfârşit, turnăm jumătate din apa ce se află în al treilea vas, în mod egal, în primul şi respectiv al doilea vas.

După aceste operaţii constatăm că în primul vas se află 60 litri de apă, în al doilea 36 litri de apă, iar în al treilea 40 litri de apă. Ce cantitate de apă era, iniţial, în fiecare vas, ştiind că toate operaţiile sunt posibile ?

Prof. Ştefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

Rezolvare cu barem:

Fie A, B şi C cele trei vase.

p_1 Turnăm jumătate din A, în mod egal în B şi C.

p_2 Turnăm jumătate din B, în mod egal, în A şi C

p_3 Turnăm jumătate din C, în mod egal, în A şi B.

p_4 În A , B şi C se află 60 *l*, 36 *l* şi respectiv 40 *l* de apă. ……………1p

Aplicăm metoda mersului invers:

Din C s-au turnat în A şi B 40 *l* de apă în mod egal.
Deci la p_3 aveam 40 *l*, 16 *l*, respectiv 80 *l*. ………………………..2p

Din B s-au turnat în A şi C 16 *l* de apă în mod egal.
Atunci la p_2 aveam 32 *l*, 32 *l*, respectiv 72 *l*………………………2p

Din A s-au turnat în B şi C 32 *l* de apă în mod egal.
Atunci la p_1 aveam 64 *l* , 16 *l*, respectiv 56 *l*………………………2p

Se pot da şi alte rezolvări apelând la ajutorul algebrei.

Pasul I: Fie A, B şi C cele trei vase.
Fie $4a$, b şi c cantitatea de apă ce se află în primul , al doilea şi respectiv al treilea vas.

Pasul al II-lea:

p_1 Turnăm jumătate din A, în mod egal în B şi C. În A rămân $\mathbf{2a}$ litri de apă, iar în B şi C sunt acum $b + a$ şi respectiv $c + a$ litri de apă.

p_2 Notăm $b + a = 4x$.
Turnăm jumătate din B, în mod egal, în A şi C. În B rămân $2x$ litri de apă, iar în A şi C sunt acum $2a + x$ şi respectiv
$c + a + x$ litri de apă.

p_3 Notăm $c + a + x = 4y$.
Turnăm jumătate din C, în mod egal, în A şi B. În C rămân $2y$ litri de apă, iar în A şi B sunt acum $2a + x + y$ şi respectiv $2x + y$ litri de apă.

p_4 În A , B şi C se află 60 *l*, 36 *l* şi respectiv 40 *l* de apă
(p_4 e rezolvată din enunţ .)

În acest caz, prezentarea celui de-al doilea pas, în tabel, e mai utilă.

	A	B	C
iniţial	$4a$	b	c
p_1	$\mathbf{2a}$	$b + a = 4x$	$c + a$

p_2	$2a + x$	**$2x$**	$c + a + x = 4y$
p_3	$2a + x + y$	$2x + y$	**$2y$**
p_4	60 litri	36 litri	40 litri

Pasul al III-lea:

- Din p_3 şi p_4 deducem egalităţile :

$2y = 40$; $2x + y = 36$ şi $2a + x + y = 60$.

Rezolvând succesiv, obţinem :

$y = 20$; $2x + 20 = 36 => 2x = 16 => x = 8$;

$2a + 8 + 20 = 60 => 2a = 32 => a = 16 => 4a = 64$.

- Înlocuind în $c + a + x = 4y$, relaţia dată de p_2, obţinem $c + 16 + 8 = 4 \cdot 20 => c + 24 = 80 => c = 56$.
- Înlocuind în relaţia $b + a = 4x$, dată de p_1 obţinem $b + 16 = 4 \cdot 8 => b + 16 = 32 => b = 16$.

Pasul al IV-lea:

Conform notaţiilor făcute la pasul I, în A, B şi C se aflau iniţial 64 *l*, 16 *l* şi respectiv 56 *l* de apă.

CLASA a V-a
Problema 1

Fie p un număr de 4 cifre şi q un număr de 3 cifre. Spunem că perechea (p, q) este o pereche CEAS, dacă prin împărţirea lui p la q se obţine un rest egal cu puterea a cincea a câtului. Câte astfel de perechi (p, q) CEAS există?

Prof. Cecilia Deaconescu, Piteşt

<u>Soluţie</u>

p = $\overline{abcd}$, q = $\overline{xyz}$, D = C · Î + R, R < Î

1p

$\overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot C + R$; $R = C^5$; $\overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot C + C^5 \Rightarrow C \neq 0$ şi $C^5 < \overline{xyz} \leq 999 < 1024 = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$ **1p**

$C^5 < 4^5$ şi $C \neq 0 \Rightarrow C \in \{1, 2, 3\}$

0,5p

1) C = 1

$\overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot 1 + 1^5 = \overline{xyz} + 1 \Rightarrow \overline{xyz} + 1 \geq 1000 \mid -1 \Rightarrow \overline{xyz} \geq 999$

Cum x ≤ 999 $\Rightarrow$ $\overline{xyz} = 999 \Rightarrow$ q = 999 şi p = 1000 $\Rightarrow$ (p, q) = (999, 1000) **1** pereche CEAS **1p**

2) C = 2

$\overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot 2 + 2^5 = \overline{xyz} \cdot 2 + 32$

$1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Leftrightarrow 1000 \leq \overline{xyz} \cdot 2 + 32 \leq 9999 \mid -32 \Leftrightarrow 968 \leq 2 \cdot \overline{xyz} \leq 9967 \mid :2 \Rightarrow$

$\overline{xyz} \in \{484, 485, ..., 999\} \Rightarrow (999 - 483) = 516 \Rightarrow 516$ numere q $= \overline{xyz} \Rightarrow$ **516** perechi (p, q) CEAS **1,5p**

3) C = 3

$\overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot 3 + 3^5 = \overline{xyz} \cdot 3 + 243$

$1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Leftrightarrow 1000 \leq \overline{xyz} \cdot 3 + 243 \leq 9999 \mid -243 \Leftrightarrow 757 \leq 3 \cdot \overline{xyz} \leq 9756 \mid :3 \Rightarrow$

$\overline{xyz} \in \{253, 254, ..., 999\} \Rightarrow (999 - 252) = 747$ numere q $= \overline{xyz} \Rightarrow$ **747** perechi (p, q) CEAS **1,5p**

Deci numărul perechilor (p, q) CEAS este: 1 +516 + 747 = 1264

0,5p

Clasa a V-a
Problema 2

Fie $a = 1 + 3 + 5 + \cdots + 213$.

a) **Arătați că a este pătrat perfect.**
b) **Determinați cifra zecilor numărului a^{2009}.**

Prof. Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

BAREM

c) $a = (1 + 2 + 3 + \cdots + 213) - (2 + 4 + \cdots + 212) = 213 \cdot 214 : 2 - 2 \cdot 106 \cdot 107 : 2 =$

$= 213 \cdot 107 - 106 \cdot 107 = 107^2$ ………………………………………………………………… …………………………………….. 2p

d) $a^{2009} = 107^{4018}$ …………………………………………………………………………………………………… 1p

$ZU(107) = 07$
$ZU(107^2) = 49$

$ZU(107^3) = 43$
$ZU(107^4) = 01$ ....
2p

Cum $4014 = 4 \cdot 1003 + 2$ avem $ZU(107^{4018}) = 49$ ....
1p

Deci cifra zecilor a numărului a^{2009} este 4 ....
1p

Clasa a V-a
Problema 3

La ,, *Şcoala cu Ceas*", în locul vestitului ceas austriac s-a instalat, iniţial, un ceas electronic, ***cu cântec***: **„**de câte ori apărea pe ecran cifra 2, el suna continuu cât timp rămânea cifra 2 afişată". Ştiind că indica timpul sub forma de la 00:00 până la 23:59, să se stabilească durata *„concertului*" zilnic.

Prof. Ştefan Smărăndoiu, Rm.Vâlcea

BAREM
Ceasul sună timp de **4 ore** de la 20:00 până la 24:00 ……...………………………………...2p

Ceasul sună **câte o oră** când afişează 02:*xy*; 12:*xy* ...…………………………………….2p

Ceasul sună **câte 15 minute** când afişează 00:*xy*, 01:*xy*, 03:*xy,* …, 09:*xy*, 10:*xy*, 11:*xy*; 13:*xy;*14:*xy*; 15:*xy*, 16:*xy* ; 17:*xy* ; 18:*xy* şi respectiv 19:*xy* **.** ……………………………2p

Concertul dura 10 ore şi 30 de minute**.**
……………………………………………………1p

Clasa a V-a
Problema 4

În această sală sunt prezenţi la concurs 25 de elevi. În urma corectării lucrărilor, la această problemă, fiecare elev va primi un punctaj ce reprezintă o cifră cel mult egală cu 7.

a) Arătaţi că există în sală cel puţin patru elevi care vor primi acelaşi punctaj.
b) Arătaţi că există, în acestă sală, cel puţin doi elevi care au acelaşi număr de prieteni în acest grup de 25 de elevi (dacă *A* e prieten cu *B*, atunci şi *B* e prieten cu *A*).

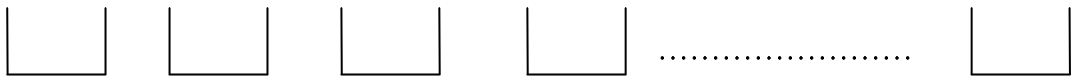
Prof. Ştefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

BAREM

a) Sunt posibile 8 punctaje: 0, 1, 2, …, 7 ……………………………………..….. 2p

Aplicand principiul cutiei exista cel putin 4 elevi cu acelasi punctaj ….. 2p

b) Ne imaginam 25 cutii corespunzatoare numarului de prieteni pe care-i poate avea un elev.



0 1 2 3 24

Daca exista un elev care nu are niciun prieten, automat nu e nici un elev cu 24 de prieteni ………………………………………………………………………………1p

Daca exista un elev care are 24 prieteni, atunci nu exista elevi cu zero prieteni ………1p

Aplicand principiul cutiei pentru 25 de elevi si 24 de posibilitati, deducem ca exista 2 elevi cu acelasi numar de prieteni. ………………………………………………. … 1p

Clasa a VI-a
Problema 2

Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu măsura ubghiului A egală cu 90^0. Fie D $\in$ (AC) şi E în semiplanul deschis determinat de dreapta AC şi punctul B, astfel încât EC $\perp$ AC şi [EC]≡[AD]. Arătaţi că:

a) [AE]≡[BD];
b) Unghiurile DBE şi AEB sunt complementare;
c) Unghiurile DBE şi AEB nu pot fi congruente.

Prof. Ştefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

BAREM

a) $\Delta ABD \equiv \Delta CAE$ (C.C.) $\Rightarrow$ AE = BD ……………………………………………………….2p

b) $\angle B \equiv \angle EAC$ şi cum $m(\angle B) + m(\angle D) = 90^0 \Rightarrow m(\angle D) + m(\angle EAC) = 90^0 \Rightarrow$ $m(\angle I) = 90^0 \Rightarrow m(\angle DBE) + m(\angle AEB) = 90^0$ ……………………………………..….3p

c) Demonstram prin reducere la absurd

Presupunem ca m(∠DBE) ≡ m(∠AEB) = 45^0 ⇒ IB = IE, dar DB = AE ⇒ ID = IA ⇒
⇒ m(∠D) ≡ m(∠IAD) ⇒ AC = CE = AD ⇒ D ≡ C (fals deoarece D ∈ (AC)) ……..…..2p

Clasa a VI-a
Problema 3

1. Pentru p număr prim, p > 3 considerăm mulţimea

$$A_p = \{ \frac{k+p^2}{24} \mid k \in N, k \le 2009 \}$$

2. . Determinaţi cardinalul mulţimii $A_p \cap N$.

Prof. Constantin Bărăscu
Prof. Florin Smeureanu

BAREM

Pentru p – prim, p>3 ⇒ $p^2 - 1 = M_{24}$ (1) ………………………….................................3p

Cum p – prim ⇒ p ∈ {$M_{24}+1$, $M_{24}+5$, $M_{24}+7$, $M_{24}+11$, $M_{24}+13$, $M_{24}+17$, $M_{24}+19$, $M_{24}+23$}

Dacă $p = M_{24}+1 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24}+1)^2 - 1 = M_{24}$

$p = M_{24}+5 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24}+5)^2 - 1 = M_{24} + 25 - 1 = M_{24}$

$p = M_{24}+7 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24}+7)^2 - 1 = M_{24} + 49 - 1 = M_{24}$

$p = M_{24}+11 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24}+11)^2 - 1 = M_{24} + 120 = M_{24}$

…………………………………………………………………

$p = M_{24}+23 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24}+23)^2 - 1 = M_{24} + 528 = M_{24}$

(1) ⇒ $\frac{p^2-1}{24} = m \in N$

Dar $\frac{k+p^2}{24} = \frac{k+1+p^2-1}{24} = \frac{k+1}{24} + \frac{p^2-1}{24} = \frac{k+1}{24} + m$ …………………… 1p

⇒ $\frac{k+p^2}{24} = \frac{k+1}{24} + m \in N$ daca (k + 1) ⋮ 24 (2) ……………………………............ 1p

Cum $1 \le k+1 \le 2010$, 2010 = $24 \cdot 83 + 18$ si din (2) ⇒ k + 1 $\in \{24t \mid t \in N, 1 \le t \le 83\}$

.... 1p

Deci Card

$A_p \cap N = 83$ ……………………………………..………........................1p

Clasa a VI-a
Problema 4

Pe o tabla sunt scrise numerele 1, 2, 3, ..., 2009. Stergem 3 numere la intamplare si scriem suma lor. Repetam operatia pana pe tabla ramane scris un singur numar.

a) Acest numar este par sau impar? Justificati!

b) Cate operatii trebuie efectuate?

Prof. Constantin Barascu, Rm. Valcea

BAREM

b) La o operatie pierdem 2 numere

Dar 2009 = 2· 1003 + 3 . Asadar sunt efectuate 1004 operaţii ……………………… 2p

a) La o operatie se poate intampla să ştergem:

(p,p,p) $\Rightarrow$ p+p+p = p $\Rightarrow$ numărul de numere impare ramane acelasi

(p,p,i) $\Rightarrow$ p + p + i = I $\Rightarrow$ numărul de numere impare ramane acelasi

(p, i, i) $\Rightarrow$ p + i + i = p $\Rightarrow$ pierdem 2 numere impare

(i, i, i) $\Rightarrow$ i + i + i = i $\Rightarrow$ pierdem 2 numere impare

…………….…………2p

Deci numarul de numere impare cand scade, scade cu „2” adica nu-si schimba paritatea…….1p

Dar in sirul 1, 2, 3, ..., 2009 avem 1005 numere impare………………………………………1p

Astfel, dupa 1004 operatii ultimul numar ramas este impar. (daca ar fi par, am avea 0 numere impare (fals) pentru ca numarul de impare este mereu impar) ………………………………...1p

Clasa a VII-a
Problema 1

Dintre mulţimile nevide $M_a = \{ x \in \mathrm{Z} \mid x = \frac{an+100}{n+2}, \quad n \in \mathrm{N}\}, \quad a \in \mathrm{Z}$, determinaţi-le pe cele cu cardinalul minim.

Prof. Gabriel Popa, Iaşi

BAREM

Cum $\frac{an_1+100}{n_1+2}=\frac{an_2+100}{n_2+2} \Leftrightarrow n_1=n_2$, card M_a este egal cu numărul de numere naturale n pentru care $n+2 \mid an+100$ 2p

Avem $n+2 \mid an+100 \Leftrightarrow n+2 \mid (an+2a)-(an+100) \Leftrightarrow \Leftrightarrow n+2 \mid 2a-100 \Leftrightarrow n+2 \in D_{2a-100} \cap [2,\infty)$ 1p

Atunci Card M_a este minim dacă $|2a-100|$ este prim 1p

Cum $2a-100=2(a-50)$, Card M_a este minim pentru $a \in \{49, 51\}$................................ 1p

Atunci $2a-100=\pm 1$ şi $n+2=2 \Leftrightarrow n=0$ 1p

Deci $M_a=\{50\}$, mulţime cu un singur element 1p

Clasa a VII-a
Problema 2

Câte triunghiuri dreptunghice având lungimile laturilor numere naturale şi aria 2008 există?

Prof. Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

BAREM

Notând cu x, y lungimile catetelor şi cu z lungimea ipotenuzei triunghiului avem că $x^2+y^2=z^2$ (*)... 1p

Cum $x^2, y^2, z^2 \in \{M_4, M_4+1\}$, conform (*) avem $x \vdots 2$ sau $y \vdots 2$ 1,5p

Cum $x^2, y^2, z^2 \in \{M_3, M_3+1\}$, conform (*) avem $x \vdots 3$ sau $y \vdots 3$ 1,5p

Concluzie: $xy \vdots 6$ 1p

Aria triunghiului dreptunghic este $A = \frac{xy}{2} = 2008 \Rightarrow xy = 4016$ ………………… 1p

Cum 6 nu e divizor al lui 4016 obţinem că nu există niciun triunghi care să respecte cerinţele problemei …………………………………………….. 1p

Clasa a VII-a
Problema 3

Fie triunghiul ABC si P un punct in interiorul acestuia. Construim paralelogramele APCB', BPCA' si BPAC'.

a) Demonstrati ca triunghiul A'B'C' este congruent cu triunghiul ABC;
b) Aratati ca dreptele AA', BB' si CC' sunt concurente.

Prof. Radu Gologan, Bucuresti

BAREM

Daca punctele O_1, O_2, O_3 mijloacele segmentelor [BC], [AC], [AB] $\Rightarrow$ punctele A', B', C' sunt simetricele lui P fata de O_1, O_2 respectiv O_3…………………………………………………. 1p

Cum O_2O_3 linie mijlocie in $\Delta PB'C' \Rightarrow B'C' = 2\, O_1O_2$

Cum O_2O_3 linie mijlocie in $\Delta ABC \Rightarrow BC = 2\, O_1O_2$ ………………………………………... 1p

Deci B'C' = BC; analog AB = A'B' si AC = A'C' ……………………………...……. 1p

Conform cazului L.L.L. $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ …………………………………..……. 1p

Cum AB' $\parallel$ PC si AB' = PC si (PC $\parallel$ BA' si PC = BA' $\Rightarrow$ AB' $\parallel$ BA' si AB' = BA' $\Rightarrow$ AB'A'B paralelogram $\Rightarrow$ BB' trece prin mijlocul lui [AA'] …………………………………………… 1p

Analog CC' trece prin mijlocul lui [AA']……………………………………..……. 1p

Deci AA', BB', CC' sunt concurente ……………………………………………. 1p

Clasa a VII-a
Problema 4

Fie ΔABC ascutitunghic şi punctele $M \in (AB), N \in (AC)$ astfel încât $\frac{MB}{AB} = \frac{NA}{AC} = \frac{1}{3}$.

Dacă $(MB - MS)(NC - NS) \le 0$ pentru orice punct *S* al segmentului *(BC),* demonstraţi că triunghiul *ABC* este isoscel de vârf *A*.

Prof. Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea
Prof. Dumitru Dobre, Rm.Vâlcea

BAREM

Dacă AB>AC şi AD⊥BC, $D \in BC \Rightarrow BD > DC \Rightarrow 3x > 3y \Rightarrow x > y$ (vezi fig.) …………1p
Fie P simetricul lui N faţă de A şi Q mijlocul segmentului [MA]
Fie $PP_1 \perp BC, QQ_1 \perp BC \Rightarrow P_1D = y < x = Q_1D \Rightarrow P_1 \in (Q_1D)$

Alegem $S \in (Q_1P_1)$ ………………………………………………………………….. 1p

In ΔBQ_1Q dreptunghic $MQ_1 = MB \Rightarrow MS > MQ_1 = MB$ ……………………………….... 1p

In ΔCP_1P dreptunghic $NP_1 = NC \Rightarrow NS > NP_1 = NC$ ……………………………………..
1p

Deci $(MB - MS) < 0 \wedge (NC - NS) < 0 \Rightarrow (MB - MS)(NC - NS) > 0$ fals
…………….1p

Se raţionează analog pentru AB<AC ……………………………………………………...
1p

Concluzie: $AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel de vârf A……………………………………………
1p

Clasa a VIII-a
Problema 1

Fie *x*, *y*, *z* numere reale cu proprietatea că $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$.

a) Să se arate că $xy \ge 0, yz \ge 0, zx \ge 0$.
b) Pot fi *x*, *y*, *z* lungimile laturilor unui triunghi? Justificaţi!

Prof. Maria Pop, Cluj-Napoca

BAREM

a) $x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx) \Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+z^2-2z(x+y)=0$ ……………………..1p

Deci $(x-y)^2+[z^2-2z(x+y)+(x+y)^2]-(x+y)^2=0$ …………………………………… 1p

Astfel $(x+y)^2-(x-y)^2=(x+y-z)^2 \Leftrightarrow 4xy=(x+y-z)^2 \geq 0$ …………….…….. 1p

Analog pentru $yz \geq 0, zx \geq 0$ …………………………………………………..………… 1p

b) Din simetria relaţiei între x, y şi z putem presupune $x \geq y \geq z$ şi din 1a) avem:

$(x+y)^2=(x+y-z)^2+(x-y)^2=(x+y-z+x-y)^2-2(x+y-z)(x-y) \leq (2x-z)^2$ ………..
. 2p

Astfel $x+y \leq 2x-z \Leftrightarrow y+z \leq x$ şi deci x, y, z nu pot fi lungimile laturilor unui triunghi…...
1p

Clasa a VIII-a
Problema 2

Aflaţi cea mai mică valoare a expresiei

$E=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$, dacă x, y, z > 0 şi $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$

Prof. Cornel Moroti, Rm.Vâlcea

BAREM

$E=x-\frac{xy}{x+y}+y-\frac{yz}{y+z}+z-\frac{zx}{z+x}=x+y+z-\frac{xy}{x+y}-\frac{yz}{y+z}-\frac{zx}{z+x}$
……………………1p

Folosim faptul ca $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ si analoagele
……………………………………..1p

Atunci $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{xy}{2\sqrt{xy}}$ si analoagele
……………………………………………..1p

Obtinem $E \geq x+y+z-\left(\frac{\sqrt{xy}}{2}+\frac{\sqrt{yz}}{2}+\frac{\sqrt{zx}}{2}\right)=x+y+z-\frac{1}{2}$
…………………………..1p

Folosind inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ pentru $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}, c=\sqrt{z}$,
obtinem $x+y+z \geq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}=1$
…………………………………………2p

Atunci $E \geq \frac{1}{2}$, minimul $E = \frac{1}{2}$ obtinandu-se pentru $x = y = z = \frac{1}{3}$ …………………1p

Clasa a VIII-a
Problema 3

Se consideră paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D'. Fie E şi F mijloacele muchiilor [BC], respectiv [CD], iar P şi Q proiecţiile punctului A pe A'B respectiv A'D. Dacă AB =3√2 cm, AA'= 8 cm, iar A'F⊥DE arătaţi că:

a) DE⊥AF şi că ABCD este pătrat;
b) A'C⊥AP;
c) Calculaţi distanţa de la punctul A' la planul (APQ).

Prof. Giurgiu Marius

BAREM

a) DE⊥A'F, DE ⊥AA'=> DE ⊥(A'AF) ……………………………………… 0,5 p
DE ⊥(A'AF) => DE ⊥AF ………………………………………………… 0,5 p
DE ⊥AF => ∠DAF≡∠CDE
∠DAF≡∠CDE => tg DAF = tg CDE ……………………………………… 0,5 p
tg DAF = tg CDE => [AD] ≡[DC]
ABCD dreptunghi si [AD] ≡[DC] => ABCD patrat ………………………….. 0,5 p

b) BC⊥AB, BC⊥AA' => BC⊥(A'AB)
BC⊥(A'AB) => BC⊥AP ………………………………………………… 0,5 p
AP ⊥A'B, AP ⊥BC => AP⊥(A'BC)
AP⊥(A'BC) => AP⊥A'C ………………………………………………… 0,5 p

c) A'C ⊥AQ …………………………………………………………………… 1 p
A'C ⊥AP, A'C⊥AQ => A'C ⊥(APQ) ……………………………………..0,5 p
Fie {R} = A'C∩(APQ) => A'R = d [A', (PAQ)] ……………………………… 1 p
R∈(PAQ), A∈(PAQ) => AR ⊂(PAQ)
A'C ⊥(PAQ) => A'C ⊥AR ……………………………………………………0,5 p
AC = 6 cm, A'C = 10cm, AR = d = $\frac{32}{5}$ cm = 6,4 cm …………………………1 p

Clasa a VIII-a
Problema 4

Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A_{ij}(i,j)$, cu $1 \leq i,j \leq 4$. Determinaţi numărul triunghiurilor care ca vârfuri trei dintre punctele date.

Prof. Gabriel Popa, Iaşi

BAREM

Reprezentarea punctelor în reperul cartezian.................................... 1p

A_{14}	A_{24}	A_{34}	A_{44}
A_{13}	A_{23}	A_{33}	A_{43}
A_{12}	A_{22}	A_{32}	A_{42}
A_{11}	A_{21}	A_{31}	A_{41}

Cele 16 puncte determină $\frac{16\cdot15\cdot14}{1\cdot2\cdot3} = 560$ triplete formate din astfel de puncte …………………. 1p

Pentru a găsi numărul triunghiurilor eliminăm tripletele formate din puncte coliniare………… 1p

Pe **fiecare** linie sunt 4 astfel de triplete coliniare………………………………………………………………. 1p

Analog pentru **fiecare** coloană şi pentru cele două diagonale ale pătratului format …………….... 1p

Mai sunt încă 4 triplete de puncte coliniare pe "diagonalele mici"-exemplu $A_{12}A_{23}A_{34}$ ……….. 1p

Concluzie: Se pot forma 560 - (16 + 16 + 8 + 4) = 516 triunghiuri …………………………………………. 1p